

理赔相依风险模型下时间一致的 均值-方差策略选择*

杨鹏¹, 张海蓉²

(1. 西京学院理学院, 陕西 西安 710123;
2. 第四军医大学唐都医院心血管内科, 陕西 西安 710038)

摘要: 在通货膨胀影响下, 研究了一类理赔相依风险模型的, 时间一致的最优策略选择问题。两种理赔的相依性通过一个共同的泊松过程来体现。为了减小风险, 保险人可以进行再保险; 为了增加财富, 保险人可以在金融市场上进行投资。进行投资时, 考虑了通货膨胀的影响, 通货膨胀的影响是通过通货膨胀率对风险资产折算实现的。研究的目的是: 保险人选择时间一致的最优再保险-投资策略, 最大化终止时刻财富的均值, 同时最小化终止时刻财富的方差。因为该问题是时间不一致的, 从博弈论的视角对问题进行了求解。应用 Hamilton-Jacobi-Bellman 动态规划的方法, 得到了时间一致的最优再保险-投资策略和相应值函数的显式解。最后通过数值计算, 解释了一些保险市场模型参数对最优再保险策略影响, 以及金融市场模型参数和通货膨胀模型参数对最优投资策略的影响。通过研究, 可以指导投资者在通货膨胀的影响下进行合理投资, 使自身财富最大而风险最小。

关键词: 通货膨胀; 均值-方差准则; 再保险-投资; 理赔相依; 时间一致

中图分类号: O211.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 04-0028-10

Time-consistent mean-variance strategy selection for claims dependent risk model

YANG Peng¹, ZHANG Hairong²

(1. School of Science, Xijing University, Xi'an 710123, China;
2. Department of Cardiology, Tangdu Hospital of Fourth Military Medical University,
Xi'an 710038, China)

Abstract: Under inflation influence, an optimal time-consistent strategy selection problem for claims dependent risk model is studied. The two claim number processes are correlated by a common Poisson process. The insurer can purchase reinsurance for reducing claims and invest its surplus in finance market for increasing wealth. In the process of investment, the effect of inflation is taken into account, and the effect of inflation is achieved through the conversion of the risk asset to the inflation rate. The objective of the insurer is to choose an optimal time-consistent reinsurance-investment strategy so as to maximize the expected terminal surplus while minimizing the variance of the terminal surplus. Since this problem is time-inconsistent, it is studied by placing the problem within a game theoretic framework. Applying Hamilton-Jacobi-Bellman dynamic programming approach, closed form solutions for the optimal reinsurance-investment strategy and the corresponding value functions are obtained. Finally, the influence of some in-

* 收稿日期: 2016-05-06

基金项目: 西京学院院科研基金 (XJ160144); 陕西省教育厅科研计划项目 (15JK2183)

作者简介: 杨鹏 (1983年生), 男; 研究方向: 数理金融、保险精算; E-mail: yangpeng511@163.com

insurance market model parameters on optimal reinsurance strategy is explained by numerical calculation, and the influence of financial market model parameters and inflation model parameters on optimal investment strategy are also given. Through this study, it can guide investors to make reasonable investment under the influence of inflation, so that their wealth is the largest and the smallest risk.

Key words: inflation; mean-variance criterion; reinsurance-investment; claims dependent; time-consistent

诺贝尔经济奖获得者 Markowitz 在 20 世纪 50 年代, 给出了著名的均值 - 方差投资策略选择问题。Markowitz 均值 - 方差投资策略选择是用均值代表收益, 方差代表风险, 该问题的研究目标是: 求得最优的策略使终止时刻财富的均值最大且方差最小。如今, 很多学者在方法和金融模型上推广了均值 - 方差策略选择问题。文献 [1] 给出了利用线性二次控制理论, 研究均值 - 方差策略选择问题的方法。文献 [2] 研究了带转移机制的均值 - 方差策略选择问题。文献 [3] 在保险风险模型中, 研究了均值 - 方差策略选择问题。文献 [4] 研究了风险相依模型的均值 - 方差策略选择问题。文献 [5] 在资产负债管理, 中研究了均值 - 方差策略选择问题。

在现实中很多情况下要求, 一个策略在最初时刻最优, 那么在之后的时刻也是最优的。在这样一种意义下, 上面提到的策略是时间不一致策略。今天的偏好和明天的偏好可能不同, 但是在很多情况下策略一致是一个基本的要求。Strotz 在 20 世纪 50 年代首次提出时间一致性策略选择问题, 他指出时间的不一致性可以通过事先占优 (pre-commitment) 的策略解决。Björk 等在文献 [6] 中研究了马氏调制以及一般目标函数下, 时间一致的策略选择问题。他们的求解方法是, 通过寻找 Nash 平衡策略得到时间一致的策略。沿着文献 [6] 的方法, 最近有很多学者研究时间一致的策略选择问题。文献 [7] 研究了经典保险风险模型在均值 - 方差准则下, 时间一致的再保险 - 投资策略选择。文献 [8] 在金融市场中风险资产的价格满足 Heston 模型下, 研究了时间一致的均值 - 方差策略选择问题。文献 [9] 把金融市场中风险资产满足的价格方程推广到 CEV 模型, 也研究了时间一致的均值 - 方差策略选择问题。还有很多文献研究时间一致的策略选择问题, 这里不再一一列举。

改革开放以来, 中国经济得到了快速的发展。从 2009 年开始, 中国的 GDP 总量已经跃居世界第 2 位。经济发展了, 一方面国民的收入有了很大的提升, 另一方面, 通货膨胀也越来越突出。最近有

一些学者开始关注, 通货膨胀影响下的投资策略选择。文献 [10] 在通货膨胀影响下, 研究了时间一致的均值 - 方差再保险 - 投资策略选择。文献 [11] 在通货膨胀影响下, 研究了 DC 型养老金的最优投资问题。文献 [12] 在通货膨胀影响下, 研究了最优消费 - 投资问题。目前, 在通货膨胀影响下研究策略选择问题的文献还不多。

本文在通货膨胀影响下, 研究了时间一致的再保险 - 投资策略选择。本文在保险市场中涉及到两种理赔业务, 这两种理赔业务具有相依性。这种理赔业务的相依性, 与文献 [13] 和文献 [14] 类似。文献 [13] 在理赔相依风险模型中, 研究了最小化破产概率的最优超额损失再保险。文献 [14] 在理赔相依风险模型中, 研究了最大化期望指数效用的最优比例再保险。本文在通货膨胀影响下, 研究了理赔相依风险模型的, 时间一致的最优再保险 - 投资策略选择问题。使用文献 [6] 中介绍的动态规划的方法, 从博弈论的角度, 得到了最优时间一致的再保险 - 投资策略。分析了通货膨胀因素以及其它一些模型参数对再保险、投资的影响。本文的主要贡献有以下 3 点: ① 在理赔相依风险模型中, 考虑了通货膨胀的影响。文献 [13 - 14] 没有考虑通货膨胀影响。② 通过动态规划的方法, 研究了时间一致的再保险 - 投资策略。文献 [13 - 14] 的再保险 - 投资策略是时间不一致的。③ 分析了一些模型参数对最优再保险 - 投资策略的影响。特别是, 分析了通货膨胀因素对投资策略的影响。

1 数理模型

本节介绍文中用到的连续时间保险 - 金融数理模型。文中的 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 和 $N(t)$ 是 3 个相互独立的齐次泊松过程, 它们的强度分别是 λ_1 , λ_2 和 λ 。 (Ω, F, P) 是一个完备的、带流的概率空间, 这里 P 是一个实值概率, 流 $F := \{F(t) : t \in [0, T]\}$ 。概率空间 (Ω, F, P) 是满足通常条件的 (也就是关于 F 是右连续的, 关于 P 是完备的), T 是投资的终止时刻, 满足 $T < \infty$ 。假设, 概率空间 $(\Omega, F,$

P) 包含下文中提到的所有随机变量和随机过程。在金融市场上进行投资时, 不考虑交易费用和税收, 所有资产都是无穷可分的, 允许连续交易。下面首先给出再保险模型, 然后给出金融市场模型, 最后给出财富过程模型。

1.1 再保险模型

考虑风险模型 $X(t) = x_0 + ct - S(t)$ 。这里 $x_0 \geq 0$ 表示保险公司的初始财富; $c > 0$ 表示单位时间的保费收入; $S(t)$ 表示到时刻 t 为止的累计理赔额。和文献 [13 - 14] 类似的, 本文考虑两种理赔相依的保险业务, $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为第一类业务的理赔额, $\{Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为第二类业务的理赔额。 X_i 的共同分布函数为 $F(x)$, Y_i 的共同分布函数为 $G(y)$ 。记 $\mu_{11} = E(X)$, $\mu_{21} = E(Y)$, $\mu_{12} = E(X^2)$, $\mu_{22} = E(Y^2)$ 。因此, 两类保险业务对应的

累积理赔额分别为 $S_1(t) = \sum_{i=1}^{K_1(t)} X_i$ 和 $S_2(t) = \sum_{i=1}^{K_2(t)} Y_i$ 。这里 $K_1(t) = N_1(t) + N(t)$, $K_2(t) = N_2(t) + N(t)$, $S_1(t) + S_2(t) = S(t)$ 。可见, 两种保险业务的相依性, 是通过共同的泊松过程 $N(t)$ 体现的。为了使最优再保险策略讨论起来更方便, 假设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 和理赔额的一阶矩、二阶矩满足下面的关系

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{22} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{21}^2 &> 0, \\ (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{21} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}\mu_{11}^2 &> 0 \end{aligned} \quad (1)$$

保险公司为了减少风险经常进行再保险, 常见的再保险有比例再保险和超额损失再保险。本文研究的再保险方式是比例再保险, 再保险水平为 $1 - q_1(t)$ 和 $1 - q_2(t)$, 这里 $q_1(t), q_2(t)$ 称为保险公司的自留额。当 $0 \leq q_1(t) \leq 1, 0 \leq q_2(t) \leq 1$ 时表示保险公司采取了再保险; 当 $q_1(t) > 1, q_2(t) > 1$ 表示保险公司购买了新业务。设 θ 为再保险公司的安全负载, 再保险的保费按照期望值原理计算, 因此再保险得保费为

$$\xi(q_1, q_2) = (1 - q_1(t))a_1 + (1 - q_2(t))a_2 \quad (2)$$

这里 $a_1 = (1 + \theta)(\lambda_1 + \lambda)\mu_{11}$, $a_2 = (1 + \theta)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}$ 。采取比例再保险后, 保险公司的盈余 $X_t^{q_1, q_2}$ 变为

$$\begin{aligned} dX_t^{q_1, q_2} &= [c - \xi(q_1, q_2)]dt - \\ &q_1(t)dS_1(t) - q_2(t)dS_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 金融市场模型

金融市场由一个无风险资产和一个风险资产构

成。无风险资产的价格为 $B(t)$, 满足微分方程 $dB(t) = rB(t)dt$, 这里 $r > 0$ 表示利率。风险资产的价格 $P(t)$ 满足随机微分方程 $dP(t) = P(t)[\mu dt + \sigma dW_1(t)]$ 。这里 $\mu (\mu > r)$ 为常数, 表示风险资产的平均收益率; $\sigma > 0$ 也是常数, 表示风险资产的波动率; $W_1(t)$ 是一维标准布朗运动。

最近, 有一些学者研究通货膨胀对投资的影响。因此, 本文也考虑了通货膨胀对投资的影响。与文献 [15] 类似, 假设通货膨胀率是随机的, 时刻 t 的价格为 $L(t)$ 满足如下的随机微分方程:

$$L(t) = L(t)[vdt + \eta dW_2(t)] \quad (4)$$

其中 v, η 为常数分别表示通货膨胀率的预期增长率和预期波动率, $W_2(t)$ 是一维标准布朗运动。因为本文考虑通货膨胀对投资的影响, 因此 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 应该具有相关关系, 设它们的相关系数为 ρ 。

投资中考虑通货膨胀的影响方式有很多, 具体可以参考文献 [10 - 12] 等。这里, 我们采用下面的方式考虑通货膨胀对投资的影响: 先考虑通货膨胀对风险资产进行折算, 折算后的风险资产作为新的风险资产; 然后, 让投资者在折算后的风险资产上进行投资。文献 [15] 也采取了类似的方法。设折算后风险资产的价格为 $P_1(t) = P(t)/L(t)$, 对 $P_1(t) = P(t)/L(t)$ 应用 Itô 得到 $P_1(t)$ 满足如下的随机微分方程

$$\begin{aligned} dP_1(t) &= P_1(t)[(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta)dt + \\ &\sigma dW_1(t) - \eta dW_2(t)] \end{aligned} \quad (5)$$

1.3 财富过程模型

以上面的再保险模型和金融市场模型为基础, 本小节给出财富过程模型。设 $u(t)$ 为时刻 t 在风险资产上投资的金额, 则在无风险资产上投资的金额为 $X_t^\pi - u(t)$ 。这里 X_t^π 为进行投资和再保险后保险公司的财富, $\pi(t) = (q_1(t), q_2(t), u(t))$ 。在任意时刻 t , 选择 $\pi(t)$ 为控制变量, 则考虑再保险和投资后, 财富过程满足下面的随机微分方程

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= u(t) \frac{dP_1(t)}{P_1(t)} + \\ &(X_t^\pi - u(t)) \frac{dB(t)}{B(t)} + dX_t^{q_1, q_2} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= [c - \xi(q_1, q_2) + rX_t^\pi + \\ &(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)u(t)]dt + \\ &u(t)[\sigma dW_1(t) - \eta dW_2(t)] - \\ &q_1(t)dS_1(t) - q_2(t)dS_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

定义 1 再保险 - 投资策略 $\pi(t) = (q_1(t), q_2(t), u(t))$ 称为可行的, 如果满足下列条件:

(i) $q_1(t), q_2(t)$ 和 $u(t)$ 是关于 F 循序可测的, 且它们是右连续左极限存在;

(ii) $q_i(t) \geq 0$, 满足 $\int_0^T q_i(t) dt < \infty, i = 1, 2$;

(iii) $\int_0^T u(t) dt < \infty$;

(iv) 随机微分方程 (6) 对于策略 $\pi(t)$ 有唯一的强解。

所有可行的保险-投资策略记为 Π 。

2 时间一致的策略选择问题

在最优投资以及最优再保险-投资问题中, 很多学者研究如下的最优化问题

$$\sup_{\pi \in \Pi} \left\{ E_{0, x_0} [X_T^\pi] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{0, x_0} [X_T^\pi] \right\} \quad (7)$$

这里 $E_{0, x_0} [\cdot] = E[\cdot | X_0^\pi = x_0]$; $\gamma > 0$ 为常数, 表示保险人的风险厌恶程度。正像在文献 [10] 中指出的一样, 问题 (7) 是时间不一致的。更精确的意思是: 对于某固定的初始点 $(0, x_0)$, 我们求得策略 π 使得问题 (7) 成立; 然而对于之后的点 (s, x_s) , 该策略 π 不能使问题 (7) 成立。问题 (7) 是时间不一致的原因是由于问题 (7) 中包含条件方差, 详细的证明可以参考文献 [16]。

本文研究时间一致策略选择问题。时间一致的策略满足下面 3 个条件:

(i) 对于时间点 t , 选择了最优策略 π ;

(ii) 假设对于时间点 t 之后的任意时间点 s , 选择了策略 π ;

(iii) 则对于投资者来说, 在时间点 s 策略 π 是他的最优选择。

可见, 投资者在时刻 s 选择策略 π , 则在之后的时间仍然选择策略 π , 且策略 π 是投资者的最优选择。在现实投资活动中, 今天的偏好和明天的偏好可能不同, 但是在很多情况下策略一致是一个基本的要求。因此需要研究当目标函数随着时间改变时的最优问题, 得到时间一致的再保险-投资策略, 对投资有很大的指导意义。和文献 [9] 等文献相似的, 我们定义如下的目标函数

$$V(t, x) = \sup_{\pi \in \Pi} V(t, x, u) =$$

$$\sup_{\pi \in \Pi} \left\{ E_{t, x} [X_T^\pi] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{t, x} [X_T^\pi] \right\} \quad (8)$$

这里 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$, $[0, T] \times \mathbf{R} = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in \mathbf{R}\}$; $E_{t, x} [\cdot] = E[\cdot | X_t^\pi = x]$; $\gamma > 0$ 为常数, 表示保险人的风险厌恶程度。文献 [9] 指出时间一致的策略恰好等于平衡策略; 通常的最优值函数等于平衡值函数。接下来, 平衡策

略 π^* 和平衡值函数, 我们就称之为最优时间一致的策略和最优值函数。最后给出时间一致策略 (平衡策略) 的严格定义。

定义 2 时间一致策略 (平衡策略): 对于任意的初始状态 $(t, x) \in T \times \mathbf{R}$ 和可行策略 $\pi^*(t, x)$, 选择 3 个实数 $\tilde{a} > 0$, $\tilde{b} > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 定义如下的策略:

$$\pi_\varepsilon(s, \tilde{x}) = \begin{cases} (\tilde{a}, \tilde{b}), & \text{for } (s, \tilde{x}) \in [t, t + \varepsilon] \times \mathbf{R}, \\ u^*(s, \tilde{x}), & \text{for } (s, \tilde{x}) \in [t + \varepsilon, T] \times \mathbf{R} \end{cases}$$

如果, 对于所有的 $\tilde{a} \geq 0$ 和 $\tilde{b} \in \mathbf{R}$ 有

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(t, x, \pi^*) - V(t, x, \pi_\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0$$

则 $\pi^*(t, x)$ 称为时间一致策略 (平衡策略), 相应的平衡值函数为 $V(t, x) = V(t, x, \pi^*)$ 。

3 验证定理和时间一致策略的求解

本节求解时间一致的再保险-投资策略和最优的值函数。先定义一个微分算子。对于任意的策略 $\pi \in \Pi$, 任意的函数 $\varphi(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R})$, 微分算子定义如下

$$\begin{aligned} P^\pi(\varphi(t, x)) = & \varphi_t + [c - \xi(q_1, q_2) + rx + \\ & (\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)u(t)]\varphi_x + \\ & 0.5(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)[u(t)]^2\varphi_{xx} + \\ & \lambda_1 E[\varphi(t, x - q_1 X) - \varphi(t, x)] + \\ & \lambda_2 E[\varphi(t, x - q_2 Y) - \varphi(t, x)] + \\ & \lambda E[\varphi(t, x - q_1 X - q_2 Y) - \varphi(t, x)] \quad (9) \end{aligned}$$

这里 $\varphi_t, \varphi_x, \varphi_{xx}$ 分别表示 $\varphi(t, x)$ 关于 t 的一阶偏导数, 和关于 x 的一阶、二阶偏导数。

下面给出验证定理。

定理 1 (验证定理) 设 $F(t, x)$, $G(t, x)$ 和 $H(t, x)$ 定义在 $[0, T] \times \mathbf{R}$ 上, 它们关于 t 连续且可微, 关于 x 二阶连续且可微。如果 F, G 和 H 满足下面的方程

$$\sup_{\pi \in \Pi} \{ P^\pi(F(t, x)) - P^\pi(0.5\gamma G^2(t, x)) + \gamma G(t, x) P^\pi(G(t, x)) \} = 0, F(T, x) = x \quad (10)$$

$$P^{\pi^*}(G(t, x)) = 0, G(T, x) = x \quad (11)$$

$$P^{\pi^*}(H(t, x)) = 0, H(T, x) = x^2 \quad (12)$$

和

$$\pi^*(t) = \arg \sup_{\pi} \{ P^\pi(F(t, x)) -$$

$$P^\pi(0.5\gamma G^2(t, x)) + \gamma G(t, x) P^\pi(G(t, x)) \}$$

则

$$\begin{aligned} V(t, x) = & F(t, x), G(t, x) = \\ & E_{t, x} [X_T^{\pi^*}], H(t, x) = E_{t, x} [X_T^{\pi^*}]^2 \quad (13) \end{aligned}$$

$\pi^*(t)$ 为时间一致的最优再保险-投资策略。

证明 本定理的证明是标准的, 可参考文献 [6]。

下面通过定理 1, 得到最优的时间一致再保险-投资策略, 以及最优值函数的显式解。为了后面书写方面, 首先定义一些记号。

$$l_1 = \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{22} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{21}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \quad (14)$$

$$l_2 = \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{21} - \lambda(\lambda_1 + \lambda)\mu_{21}\mu_{11}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \quad (15)$$

$$l_3 = -\frac{(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)^2}{2\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)} + l_1 a_1 +$$

$$l_2 a_2 - \frac{\gamma}{2}(\lambda_1 + \lambda)\mu_{12}l_1^2 - (\lambda_1 + \lambda)\mu_{11}l_1 -$$

$$\frac{\gamma}{2}(\lambda_2 + \lambda)\mu_{22}l_2^2 - (\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}l_2 - \lambda\gamma\mu_{11}\mu_{21}l_1l_2 \quad (16)$$

$$l_4 = -\frac{(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)^2}{\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)} +$$

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 - (\lambda_1 + \lambda)\mu_{11}l_1 - (\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}l_2 \quad (17)$$

为了证明下面的定理 2, 给出如下的引理 1。

引理 1 设 $A(q_1, q_2)$ 满足下式

$$\begin{aligned} A(q_1, q_2) = & -\xi(q_1, q_2)A(t) - \\ & 0.5\lambda_1\gamma m^2(t)q_1^2(t)\mu_{12} - \\ & \lambda_1 A(t)q_1(t)\mu_{11} - 0.5\lambda_2\gamma m^2(t)q_2^2(t)\mu_{22} - \\ & \lambda_2 A(t)q_2(t)\mu_{21} - \\ & 0.5\lambda\gamma m^2(t)[q_1^2(t)\mu_{12} + q_2^2(t)\mu_{22} + \\ & 2q_1(t)q_2(t)\mu_{11}\mu_{21}] - \\ & \lambda A(t)q_1(t)\mu_{11} - \lambda A(t)q_2(t)\mu_{21} \end{aligned} \quad (18)$$

则 $(\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t))$ 为 $A(q_1, q_2)$ 的最大值点。

证明 $A(q_1, q_2)$ 关于 q_1, q_2 求二阶偏导数

$$A = \frac{\partial^2 A(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} =$$

$$-(\lambda_1 + \lambda)\gamma m^2(t)\mu_{12} < 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 A(q_1, q_2)}{\partial q_1 \partial q_2} = -\lambda\gamma m^2(t)\mu_{11}\mu_{21},$$

$$C = \frac{\partial^2 A(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} = -(\lambda_2 + \lambda)\gamma m^2(t)\mu_{22}$$

所以 $AC - B^2 = m^4(t)\gamma^2[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2]$ 。根据柯西-施瓦兹不等式容易得到, $AC - B^2 > 0$, 又 $A < 0$, 所以 $(\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t))$ 为 $A(q_1, q_2)$ 的极大值点。因为极值点唯一, 所以 $(\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t))$ 为 $A(q_1, q_2)$ 的最大值点。证毕。

定理 2 对于财富过程 (6), 最优的时间一致的投资策略为

$$u^*(t) = \frac{(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)}{\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)} e^{-r(T-t)} \quad (19)$$

最优的时间一致的再保险策略为

$$\begin{aligned} q_1^*(t) = & \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{22} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{21}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \\ & \frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}}, \\ q_2^*(t) = & \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{21} - \lambda(\lambda_1 + \lambda)\mu_{21}\mu_{11}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \\ & \frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}} \end{aligned} \quad (20)$$

最优值函数为

$$F(t, x) = xe^{r(T-t)} + \frac{B(t)}{\gamma} \quad (21)$$

在最优策略和终止时刻 T 下, 财富过程的方差为

$$\text{Var}_{t,x}[X_T^{\pi^*}] = \frac{2[n(t) - B(t)]}{\gamma^2} \quad (22)$$

这里 $B(t)$ 和 $n(t)$ 分别满足 (37) 式和 (38) 式。

证明 本定理的证明分成 2 步。第 1 步, 证明最优值函数满足 (21) 式。这里使用的方法如下: 和文献 [9] 类似的, 构造 $F(t, x)$ 和 $G(t, x)$ 分别满足下面的 (25) 式和 (26) 式, 然后把 $F(t, x)$ 和 $G(t, x)$ 的表达式代入 (9) 式和 (10) 式, 并结合引理 1 则可完成第 1 步证明; 第 2 步, 证明最优的时间一致的投资策略满足 (19) 式, 最优的时间一致的再保险策略满足 (20) 式。

第 1 步和文献 [9] 类似的, 根据 (8) 式和定理 1, 可以容易得到下式

$$\begin{aligned} F(t, x) = V(t, x) = \\ E_{t,x}[X_T^{\pi^*}] - 0.5\gamma\{E_{t,x}^2[X_T^{\pi^*}] - (E_{t,x}[X_T^{\pi^*}])^2\} = \\ G(t, x) - 0.5\gamma[H(t, x) - G^2(t, x)] \end{aligned}$$

上式变形, 得

$$H(t, x) = G^2(t, x) + 0.5\gamma[G(t, x) - F(t, x)] \quad (23)$$

结合微分算子 (9) 式和 (23) 式, 下面给出 (10) 式更明确的形式, 如下

$$\begin{aligned} \sup_{\pi \in \Pi} \{ & F_t + [c - \xi(q_1, q_2) + rx + \\ & (\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)u(t)]F_x + \\ & 0.5u^2(t)(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)[F_{xx} - \gamma G_x^2] + \\ & \lambda_1(1 + \gamma G)E[G(t, x - q_1 X) - G(t, x)] + \\ & \lambda_2(1 + \gamma G)E[G(t, x - q_2 Y) - G(t, x)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda(1 + \gamma G)E[G(t, x - q_1 X - q_2 Y) - G(t, x)] - \\ & 0.5\lambda_1\gamma E[H(t, x - q_1 X) - H(t, x)] - \\ & 0.5\lambda_2\gamma E[H(t, x - q_2 Y) - H(t, x)] - \\ & 0.5\lambda\gamma E[H(t, x - q_1 X - q_2 Y) - H(t, x)] \} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

综合考虑盈余过程的结构和边界条件 $F(T, x) = x$ 和 $G(T, x) = x$, 和文献 [9] 类似的, 构造 $F(t, x)$ 和 $G(t, x)$ 的形式如下

$$\begin{aligned} F(t, x) &= A(t)x + \frac{B(t)}{\gamma}, \\ A(T) &= 1, B(T) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} G(t, x) &= m(t)x + \frac{n(t)}{\gamma}, \\ m(T) &= 1, n(T) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

对 $F(t, x), G(t, x)$ 分别求偏导数, 得到

$$\begin{aligned} F_t &= A'(t)x + \frac{B'(t)}{\gamma}, F_x = A(t), F_{xx} = 0, \\ G_t &= m'(t)x + \frac{n'(t)}{\gamma}, G_x = m(t), G_{xx} = 0 \end{aligned}$$

把 $F(t, x), G(t, x)$ 的表达式和 (23) 式, 以及上面的各偏导数, 代入 (24) 式化简后得

$$\begin{aligned} \sup_{\pi \in \Pi} \left\{ A'(t) + \frac{B'(t)}{\gamma} + [c + rx]A(t) + \right. \\ \left. A(q_1, q_2) + B(u) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $A(q_1, q_2)$ 满足 (18) 式, $B(u)$ 定义如下

$$\begin{aligned} B(u) &= (\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)u(t)A(t) - \\ & 0.5u^2(t)m^2(t)(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)\gamma \end{aligned} \quad (28)$$

$A(q_1, q_2)$ 关于 q_1, q_2 分别求偏导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(q_1, q_2)}{\partial q_1} &= -(\lambda_1 + \lambda)\gamma m^2(t)\mu_{12}q_1(t) - \\ & \lambda\gamma m^2(t)\mu_{11}\mu_{21}q_2(t) + \theta(\lambda_1 + \lambda)\mu_{11}A(t), \\ \frac{\partial A(q_1, q_2)}{\partial q_2} &= -(\lambda_2 + \lambda)\gamma m^2(t)\mu_{22}q_2(t) - \\ & \lambda\gamma m^2(t)\mu_{11}\mu_{21}q_1(t) + \theta(\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}A(t) \end{aligned}$$

令两个偏导数为 0, 得到

$$\hat{q}_1(t) = l_1 \frac{A(t)}{\gamma m^2(t)}, \hat{q}_2(t) = l_2 \frac{A(t)}{\gamma m^2(t)} \quad (29)$$

$B(u)$ 求导数, 令导数为 0 得到:

$$u^* = \frac{(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)A(t)}{\gamma m^2(t)(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)}$$

把 u^* 和 $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ 代入 (27) 式, 整理化简后, 得到

$$\begin{aligned} [A'(t) + rA(t)]x + \frac{B'(t)}{\gamma} + \\ (c - a_1 - a_2)A(t) + \frac{l_3 A^2(t)}{m^2(t)} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

根据 (30) 式, 可以得到

$$A'(t) + rA(t) = 0, \quad A(T) = 1 \quad (31)$$

$$\frac{B'(t)}{\gamma} + (c - a_1 - a_2)A(t) + \frac{l_3 A^2(t)}{m^2(t)} = 0,$$

$$B(T) = 0 \quad (32)$$

把 u^* 和 $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ 代入 (11) 式, 整理化简后, 得到

$$\begin{aligned} [m'(t) + rm(t)]x + \frac{n'(t)}{\gamma} + \\ (c - a_1 - a_2)m(t) + \frac{l_4 A(t)}{m(t)} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

根据 (33) 式, 可以得到

$$m'(t) + rm(t) = 0, \quad m(T) = 1 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{n'(t)}{\gamma} + (c - a_1 - a_2)m(t) + \frac{l_4 A(t)}{m(t)} = 0, \\ n(T) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

先求解 (31) 式和 (34) 式, 得到

$$A(t) = m(t) = e^{r(T-t)} \quad (36)$$

(36) 式分别代入 (32) 式和 (35) 式, 得到

$$B(t) = \frac{\gamma(c - a_1 - a_2)}{r} [e^{r(T-t)} - 1] + (T - t)l_3 \quad (37)$$

$$n(t) = \frac{\gamma(c - a_1 - a_2)}{r} [e^{r(T-t)} - 1] + (T - t)l_4 \quad (38)$$

所以最优值函数 $F(t, x)$ 为

$$F(t, x) = A(t)x + \frac{B(t)}{\gamma} = e^{r(T-t)}x + \frac{B(t)}{\gamma}$$

财富过程的方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t,x}[X_T^{\pi^*}] &= \frac{2}{\gamma} [F(t, x) - E_{t,x}[X_T^{\pi^*}]] = \\ & \frac{2}{\gamma} [F(t, x) - G(t, x)] = \\ & \frac{2[n(t) - B(t)]}{\gamma^2} \end{aligned}$$

第 2 步 (36) 式代入 (29) 式, 可得 (20) 式; 由于 (1) 式的限制, 所以 $q_1^*(t) > 0, q_2^*(t) > 0$ 。因此 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 为最优策略。由 (36) 式有

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{(\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r)A(t)}{\gamma m^2(t)(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)} = \\ & \frac{\mu + \eta^2 - v - \rho\sigma\eta - r}{\gamma(\sigma^2 + \eta^2 - 2\rho\sigma\eta)} e^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

4 数值计算

这一节通过一些数值计算, 分析一些模型参数改变时对最优投资策略、最优再保险策略的影响。

同时,分析通货膨胀因素对投资的影响。

4.1 最优投资策略

4.1.1 通货膨胀因素对最优投资策略的影响 先分析通货膨胀因素对最优投资策略的影响。根据(4)式,通货膨胀率价格 $L(t)$ 满足的随机微分方程中,含有 2 个参数 v 和 η 。金融市场和通货膨胀,通过相关系数 ρ 联系在一起。下面我们就通过 3 个例子分析通货膨胀参数 v , η 和 ρ 对最优投资策略的影响。

例 1 设 $\mu = 0.05, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, r = 0.02, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, \eta = 0.2, v \in [0.02, 0.05]$ 。根据(19)式计算最优投资策略 $u^*(t)$,图 1 给出了 v 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

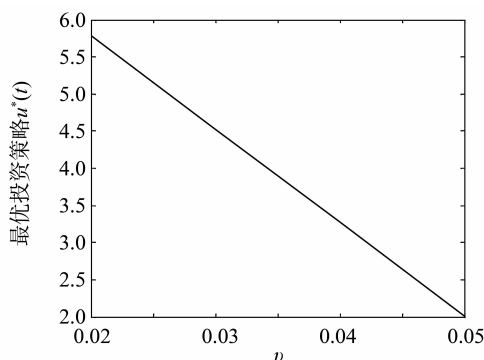


图 1 v 对最优投资策略的影响

Fig. 1 Effect of v on the optimal investment strategy

从图 1 可以看到,最优投资策略是关于 v 单调递减的函数。 v 表示通货膨胀率的预期增长率,随着通货膨胀率的预期增长率的增大,投资者会把更多的资金投资在无风险资产上,以此增加财富。

例 2 设 $\mu = 0.05, v = 0.02, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, r = 0.02, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, \eta \in [0.1, 0.5]$ 。根据(19)式计算最优投资策略 $u^*(t)$,图 2 给出了 η 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

从图 2 可以看到,最优投资策略是关于 η 单调递增的函数。 η 表示通货膨胀率的波动率,随着通货膨胀率的波动率的增加,投资者会把更多的资金投资到风险资产上。

例 3 设 $\mu = 0.05, v = 0.02, r = 0.02, \sigma = 0.2, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, \eta = 0.2, \rho \in [-0.5, 0.5]$ 。根据(19)式计算最优投资策略 $u^*(t)$,图 3 给出了 ρ 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

从图 3 可以看到,最优投资策略是关于 ρ 单调递增的函数。 ρ 表示风险资产和通货膨胀之间的相关系数,随着风险资产和通货膨胀之间的相关系数增

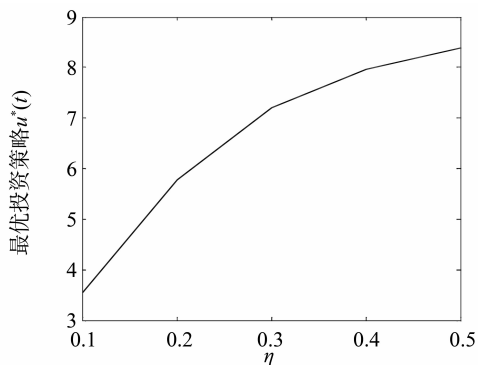


图 2 η 对最优投资策略的影响

Fig. 2 Effect of η on the optimal investment strategy

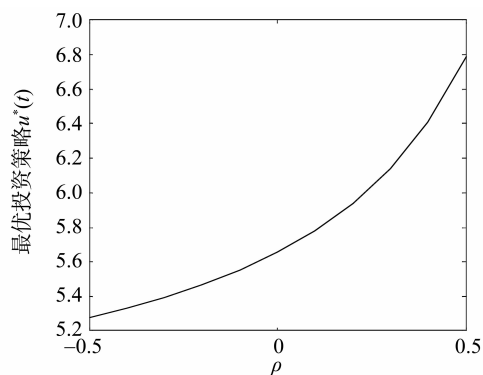


图 3 ρ 对最优投资策略的影响

Fig. 3 Effect of ρ on the optimal investment strategy

大,投资者会把更多的资金投资到风险资产,以此来对冲通货膨胀带来的资金贬值。

4.1.2 其它参数对最优投资策略的影响 下面分析金融市场其它参数对最优投资策略的影响。

例 4 设 $\mu = 0.05, \eta = 0.2, v = 0.02, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, r \in [0.02, 0.05]$ 。根据(19)式计算最优投资策略 $u^*(t)$,图 4 给出了 r 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

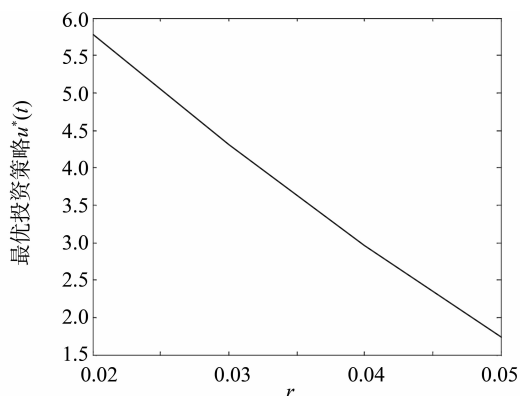


图 4 r 对最优投资策略的影响

Fig. 4 Effect of r on the optimal investment strategy

从图 4 可以看到，最优投资策略是关于 r 单调递减的函数。 r 表示无风险资产的期望收益率，随着 r 的增大，投资者会把更多的资金投资到无风险资产，而不会冒险进行投资。

例 5 设 $\mu = 0.05, \rho = 0.1, v = 0.02, r = 0.02, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, \eta = 0.2, \sigma \in [0.2, 0.5]$ 。根据 (19) 式计算最优投资策略 $u^*(t)$ ，图 5 给出了 σ 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

从图 5 可以看到，最优投资策略是关于 σ 单调递减的函数。 σ 表示风险资产的波动率，随着风险资产的波动率增大，在风险资产上投资的不确定因素增大。因此保险人会减少在风险资产上投资的金额。

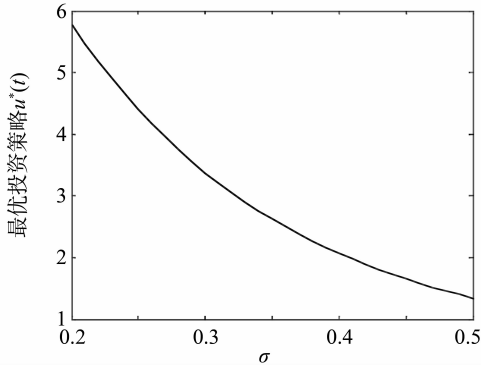


图 5 σ 对最优投资策略的影响

Fig. 5 Effect of σ on the optimal investment strategy

例 6 设 $\mu = 0.05, v = 0.02, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, r = 0.02, T = 10, t = 5, \eta = 0.2, \gamma \in [0.1, 0.5]$ 。根据 (19) 式计算最优投资策略 $u^*(t)$ ，图 6 给出了 γ 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

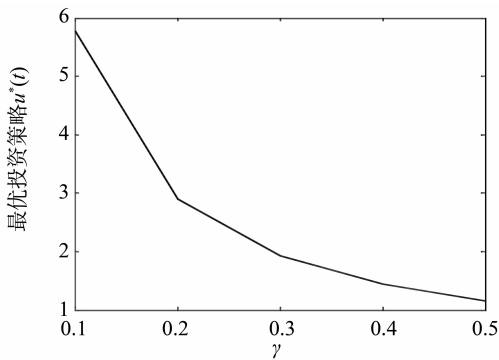


图 6 γ 对最优投资策略的影响

Fig. 6 Effect of γ on the optimal investment strategy

从图 6 可以看到，最优投资策略是关于 γ 单调递减的函数。 γ 表示保险人的风险厌恶参数，随着

风险厌恶参数的增大，保险人会减少在风险资产上投资的金额。

例 7 设 $\mu = 0.05, v = 0.02, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, r = 0.02, T = 10, \gamma = 0.1, \eta = 0.2, t \in [5, 9]$ 。根据 (19) 式计算最优投资策略 $u^*(t)$ ，图 7 给出了 t 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

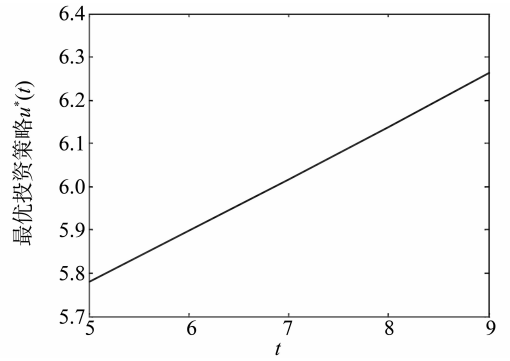


图 7 t 对最优投资策略的影响

Fig. 7 Effect of t on the optimal investment strategy

从图 7 可以看到，最优投资策略是关于 t 单调递增的函数。这表明，在投资的终止时刻快来临时，保险人为了增加收入会把更多的资金投资到风险资产上。

例 8 设 $\eta = 0.2, v = 0.02, \rho = 0.1, \sigma = 0.2, r = 0.02, T = 10, t = 5, \gamma = 0.1, \mu \in [0.05, 0.09]$ 。根据 (19) 式计算最优的投资策略 $u^*(t)$ ，图 8 给出了 μ 对投资策略 $u^*(t)$ 的影响。

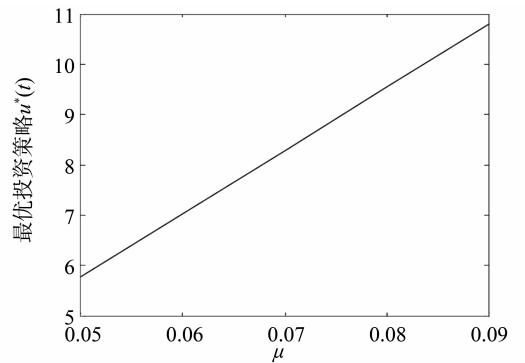


图 8 μ 对最优投资策略的影响

Fig. 8 Effect of μ on the optimal investment strategy

从图 8 可以看到，最优投资策略是关于 μ 单调递增的函数。 μ 表示风险资产的期望收益率，随着风险资产的期望收益增大，保险人在风险资产上投资将获得更大的收益。因此保险人会增加在风险资产上投资的金额。

4.2 最优再保险策略

本小节分析一些模型参数对最优再保险策略的影响。

(20) 式关于 r 求偏导数, 得到

$$\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial r} = \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{22} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{21}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \frac{T-t}{\gamma e^{r(T-t)}} < 0,$$

$$\frac{\partial q_2^*(t)}{\partial r} = \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{21} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}\mu_{11}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \frac{T-t}{\gamma e^{r(T-t)}} < 0$$

可见最优再保险策略是关于 r 单调递减的函数。这是因为, r 是无风险资产的利率, 随着 r 的增大, 无风险资产的期望收入将增大, 因此保险人从投资中获得更大的收入。因此, 为了减少自身所承担的风险, 保险人会减少自身的保留额, 把更多风险转移到再保险者。

(20) 式关于 t 求偏导数, 得到

$$\frac{\partial q_1^*(t)}{\partial t} = \frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{22} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{11}\mu_{21}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \frac{r}{\gamma e^{r(T-t)}} > 0,$$

$$\frac{\partial q_2^*(t)}{\partial t} =$$

$$\frac{[(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{21} - \lambda(\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}\mu_{11}^2]\theta}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)\mu_{12}\mu_{22} - \lambda^2\mu_{11}\mu_{21}^2} \cdot \frac{r}{\gamma e^{r(T-t)}} > 0$$

可见最优再保险策略是关于 t 单调递增的函数。这说明, 随着投资终止时刻的来临, 保险人会保留更多的保险业务。

最优再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 中都含有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 以及两种理赔额的一阶、二阶矩, 这说明了两种保险业务之间的相依性。下面讨论相依性对最优再保险策略的影响。假设两种保险业务的理赔额的分布为别为 $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0, G(y) = 1 - e^{-2y}, y > 0$ 。所以 $\mu_{11} = 1, \mu_{12} = 2, \mu_{21} = 0.5, \mu_{22} = 0.5$ 。

例 9 设 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, r = 0.05, T = 10, t = 5, \theta = 1, \lambda \in [2, 8]$ 。图 9 给出了 λ 对再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响。设 $\lambda = 4, \lambda_2 = 3, r = 0.05, T = 10, t = 5, \theta = 1, \lambda_1 \in [2, 8]$ 。图 9 给出了 λ_1 对再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响。设 $\lambda_1 = 3, \lambda = 4, r = 0.05, T = 10, t = 5, \theta = 1, \lambda_2 \in [2, 8]$ 。图 9 给出了 λ_2 对再保险策略 $q_1^*(t), q_2^*(t)$ 的影响。

从图 9 可以看出, 最优再保险策略是关于参数 λ 和 λ_2 单调递减的函数, 最优再保险策略是关于 λ_1 单调递增的函数。这里 λ, λ_1 和 λ_2 代表期望理赔次数。随着期望理赔次数的增加, 在两种相关的理赔业务中, 保险人采取的再保险策略相反。图 9 中最优再保险策略 $q_2^* > 1$, 表示保险公司采取了新的保险业务。

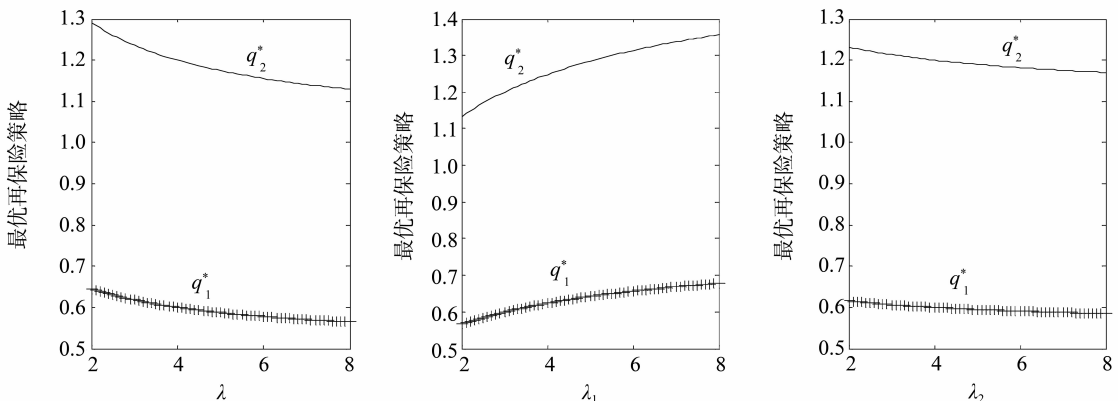


图 9 λ_i 对最优再保险策略的影响

Fig. 9 Effect of λ_i on the optimal reinsurance strategy

参考文献:

- [1] ZHOU X, YIN G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model [J]. *SIAM Journal on Control and Optimal*, 2003, 42(4):1466-1482.
- [2] 伍慧玲, 李仲飞. 带转移机制且股票价格服从几何 Levy 过程的连续时间均值-方差投资组合选择[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2011, 50(1): 31-33.
WU H L, LI Z F. Continuous-time mean-variance optimal portfolio selection with regime switching when stock prices follow geometric levy processes [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2011, 50(1): 31-33.
- [3] BÄUERLE N. Benchmark and mean-variance problems for insurers [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2005, 62:159-165.
- [4] 谷爱玲, 李仲飞, 申曙光. 保险公司在风险相依模型中均值-方差准则下的最优投资策略[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2013, 52(5): 57-67.
GU A L, LI Z F, SHEN S G. Optimal investment strategy for an insurer under mean-variance in a dependent risk model [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2013, 52(5): 57-67.
- [5] XIE S X. Continuous-time portfolio selection with liability and regime switching [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(1):148-155.
- [6] BJÖRK T, MURGOCI A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems [J]. *Ssrn Electronic Journal*, 2010, 18(3): 545-592.
- [7] LI Z F, ZENG Y, LAI Y Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston's SV model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(1): 191-203.
- [8] ZENG Y, LI Z F. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2011, 49(1): 145-154.
- [9] LIN X, QIAN Y P. Time-consistent mean-variance reinsurance-investment strategy for insurers under CEV model [J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(7): 1-26.
- [10] LI D P, RONG X M, ZHAO H. Time-consistent reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer under stochastic interest rate model and inflation risk [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015, 64(1): 28-44.
- [11] SUN J Y, LI Z F, ZENG Y. Equilibrium investment strategy for DC pension plan with inflation and stochastic income under Heston's SV model [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 2016(3): 1-18.
- [12] WU H L. Optimal investment-consumption strategy under inflation in a Markovian regime-switching market [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016, 2016(1):1-17.
- [13] BAI L, CAI J, ZHOU M. Optimal reinsurance policies for an insurer with a bivariate reserve risk process in a dynamic setting [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 664-670.
- [14] LIANG Z B, YUEN K C. Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: variance premium principle [J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014, 2016(1): 1-19.
- [15] 丁传明, 邹捷中. 考虑通货膨胀影响的最优消费投资模型[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2004, 35(1): 167-170.
DING C M, ZOU J Z. Optimal consumption and investment model considering effect of currency inflation [J]. *Journal of Central South University (Natural Science)*, 2004, 35(1): 167-170.
- [16] CZICHOWSKY C. Time-consistent mean-variance portfolio selection in discrete and continuous time [J]. *Finance and Stochastics*, 2013, 17(2): 227-271.